العينات المرتبة

- **المتبادلات (التباديل):**
- لنفترض أن لدينا n من المفردات يراد ترتيبها او وضعها في n من الأماكن أو المواضع بحيث أن كل مفردة تستعمل ولمرة واحدة فقط فان عدد الطرق الممكنة للترتيب يسمى هنا مضروب n factroial والذي يرمز له بـ !n . لذلك فان عدد الطرق الممكنة هو

$$n!=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1$$

مثال

- بكم طريقة يستطيع أربعة أشخاص شغل أربعة مناصب؟

$$|\Omega| = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$ طريقة مختلفة

العينات المرتبة

- **المرتبات (التراتيب):**
- لنفترض أنّ لدينا n من المفردات يراد ترتيبها أو وضعها في xمن الأماكن أو المواضع بحيث أن كل مفردة تستعمل ولمرة واحدة فقط فان عدد الطرق المكنة للترتيب يسمى هنا تباديل x من المفردات من n من المفردات والذي يرمز له بـ P_x^n . لذلك فان عدد الطرق الممكنة هو

$$P_x^n = \frac{n!}{(n-x)!} = n(n-1)(n-2)...(n-x+1)$$

مثال

- نريد ترتيب مرجع مؤلف من ستة أجزاء على أحد رفوف مكتبة. ولكن لا يتوفر لدينا سوى أربعة أماكن. فبكم طريقة مختلفة يمكننا شغل هذه الأماكن الأربعة المتوفرة بأربعة أجزاء نحتارها من الأجزاء الستة؟

$$|\Omega| = 6\times5\times4\times3 = 360$$ طريقة مختلفة

$$= \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 360$$ طريقة مختلفة

العينات المرتبة

- **المتوافقات (التوافيق):**
- إذا أردنا اختيار r عنصراً من n عنصراً **عشوائياً** **ومعاً** فإننا نستطيع الاختيار بعدد من الطرق مقدارها

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

- **والتي نسميها توافيق (n ، r)**

مثال

- بكم طريقة نستطيع اختيار 4 أوراق من ورق اللعب؟

$C_{52}^4 = 270725$ طريقة

- بكم طريقة نستطيع اختيار 4 صور من ورق اللعب؟

$C_{12}^4 = 495$ طريقة

- بكم طريقة نستطيع اختيار 4 أرقام من ورق اللعب؟

$C_{40}^4 = 194580$ طريقة

مثال

- بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من 7 طلاب و4 طالبات من مجموعة مكونة من 10 طلاب و8 طالبات؟؟

$$C_{10}^{7}\times C_{8}^{4}=\frac{10!}{7!\,(3)!}\times\frac{8!}{4!\,(4)!}$$

$$=\ 120\ \times\ 70\ =8400$$ طريقة

مثال 3:

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين، ليكن:

A الحدث الدال على ظهور صورة في الرمية الأولى.

B الحدث الدال على حصولنا على نتيجتين متماثلتين في الرميتين.

أ- اكتب فضاء العينة لهذه التجربة وعين كلا من A و B.

ب-ما الذي يمثله كلا من الأحدث التالية:

$A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ ، $B - A$ ، A' ، B' ، $A' \cup B'$ ، $A' \cap B'$.

الحل:

لنرمز بـ H للصورة و بـ T للكتابة.

أ- فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

حيث:

HH هو حدث الحصول على صورة في الرميتين الأولى و الثانية.

HT هو حدث الحصول على صورة في الرمية الأولى و كتابة في الرمية الثانية.

TH هو حدث الحصول على كتابة في الرمية الأولى و صورة في الرمية الثانية.

TT هو حدث الحصول على كتابة في الرميتين الأولى و الثانية.

و يكون: $A=\{HH,HT\}$ ، $B=\{HH,TT\}$

ب-

$$A\cup B=\{HH,HT,TT\}$$

$$A\cap B=\{HH\}$$

$$A-B=\{HT\}$$

$$B-A=\{TT\}$$

$$A'=\Omega-A=\{TH,TT\}$$

$$B'=\Omega-B=\{HT,TH\}$$

$$A'\cap B'=\{TH\}$$

$$A'\cup B'=(A\cap B)'=\{HH\}'=\{HT,TH,TT\}$$

مثال:

إذا كان احتمال أن يصاب نبات معين بالمرض A هو $\frac{1}{4}$ واحتمال أن يصاب بالمرض B هو $\frac{1}{3}$

واحتمال أن يصاب بأحد المرضين A أو B هو $\frac{1}{2}$.

فما هو احتمال أن يصاب النبات بالمرضين A و B معا؟

الحل:

لنفرض أنّ: A حدث إصابة النبات بالمرض A.

B حدث إصابة النبات بالمرض B.

حسب المبرهنة (1) يكون احتمال إصابة النبات بالمرضين A و B معا هو:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - p(A \cup B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

مثال 5:

نرمي قطعة نقود وحجر نرد، ما هو عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة؟

الحل: نرمز بـ H و T لوجهي قطعة النقود كما نرمز بـ $1,2,3,4,5,6$ للوجوه الستة لحجر النرد.

يمكن تمثيل النتائج الممكنة لهذه التجربة على شكل ثنائيات حيث يدل المسقط الأول على نتيجة قطعة النقود والمسقط الثاني على نتيجة حجر النرد وبالتالي فإن فضاء العينة لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6) \\ (T,1),(T,2),\ (T,3),\ (T,4),\ (T,5),\ (T,6) \end{Bmatrix}$$

عدد النتائج الممكنة كما نلاحظ هو 12 وكان بإمكاننا أن نعين عدد تلك النتائج إذا ما لاحظنا أن تعيين الثنائية يتم على مرحلتين فاختيار المسقط الأول يتم بطريقتين مختلفتين H أو T واختيار المسقط الثاني يتم بست طرائق مختلفة 1 أو 2 أو ....أو 6. ويكون عدد الطرائق الممكنة حسب المبدأ الأساسي للعد يساوي 2×6=12.

مثال 6:

قاعة للاحتفالات لها أربعة أبواب بكم طريقة مختلفة يمكنك الدخول إلى القاعة والخروج منها دون أن تستخدم الباب ذاته في الدخول والخروج.

الحل:

نلاحظ بأن الدخول يتم بـ 4 طرائق ومن أجل كل منها يمكن أن يتم الخروج بـ 3 طرائق بالتالي فعدد الطرائق المختلفة يساوي حسب المبدأ الأساسي للعد 3×4=12.

مثال 7:

كم عدداً مكوناً من خمسة أرقام يمكن تشكيله من الأرقام 1,2,3,4,5 على ألا يتكرر الرقم في أي عدد أكثر من مرة واحدة.

الحل: $P_5 = 5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$

مثال 8: بكم طريقة يمكن لثلاثة أشخاص أن يشغلوا ثلاثة مناصب مختلفة؟

الحل: $P_3 = 3! = 3\times 2\times 1 = 6$

مثال 9: بكم طريقة يمكن توزيع 4 مناصب مختلفة على 6 مرشحين.

الحل:

كون المناصب مختلفة يجعل المسألة مسألة ترتيب 4 أشخاص من بين 6 وعدد الطرائق المختلفة هو:

$$P_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 6\times 5\times 4\times 3 = 360$$

مثال 10: ما عدد الكلمات ذات ثلاثة الأحرف المختلفة الممكن تكونها من حروف كلمة *HISTORY*.

الحل: المسألة هنا هي مسألة إيجاد عدد تراتيب حروف كلمة *HISTORY* البالغة 7 أحرف مختلفة مأخوذة ثلاثاً في كل مرة. وعدد التراتيب هذه هي:

$$P_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7\times 6\times 5 = 210$$

مثال 11:

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تضم طالبتين وثلاثة طلاب من مجموعة مكونة من خمس طالبات وتسعة طلاب.

الحل:

إن عدد طرائق اختيار طالبتين هو:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{(5)(4)(3!)}{2!3!} = 10$$

وعدد طرائق اختيار ثلاثة طلاب هو :

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = \frac{(9)(8)(7)(6!)}{3!6!} = \frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)} = 84$$

وحسب المبدأ الأساسي للعد يكون عدد طرائق اختيار اللجنة هو :

$$C_5^2 . C_9^3 = (10)(84) = 840$$

مثال 12:

صندوق يحوي 8 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء، نسحب عشوائياً خمس كرات، ما احتمال أن يكون لدينا في العينة المسحوبة كرتان بيضاوان؟

الحل:

عدد الحالات الممكن لسحب 5 كرات هو:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = \frac{(12)(11)(10)(9)(8)(7!)}{5!7!} = 792$$

وعدد الحالات الملائمة هو عدد طرائق اختيار كرتين بيضاوين من الكرات الثماني البيضاء مضروبا بعدد طرائق اختيار الكرات السوداء الباقية من بين الكرات الأربع المتوفرة يساوي:

$$C_8^2 . C_4^3 = \frac{8!}{2!6!} \times \frac{4!}{3!1!} = \frac{(8)(7)(6!)}{2!6!} \times \frac{4(3!)}{3!1!} = 112$$

ويكون الاحتمال المطلوب:

$$\frac{C_8^2 . C_4^3}{C_{12}^5} = \frac{112}{792} = 0.14$$

مثال 13:

إذا كان عدد أوراق يانصيب 30 ورقة من بينها 5 أوراق رابحة. اشترى شخص ثماني أوراق.

أ- ما هو احتمال ألا يربح المشتري أي جائزة.

ب-ما احتمال أن يربح ثلاثة جوائز.

ج- ما احتمال أن يربح جائزة على الأقل.

الحل:

عدد الحالات الممكنة لشراء 8 أوراق هو:

$$C_{30}^8 = \frac{30!}{8!22!} = 5852925$$

أ- ألا يربح المشتري أي جائزة توافق حالة شراء 8 أوراق غير رابحة وعدد الحالات الملائمة يساوي:

$$C_{25}^{8}=\frac{25!}{8!17!}=1081575$$

ومنه احتمال ألا يربح المشتري أي جائزة هو :

$$\frac{C_{25}^{8}}{C_{30}^{8}}=\frac{1081575}{5852925}=0.185$$

ب-عدد الحالات الملائمة يساوي:

$$C_{5}^{3}.C_{25}^{5}=\frac{5!}{3!2!}\times\frac{25!}{5!20!}=531300$$

ومنه احتمال أن يربح ثلاث جوائز يساوي:

$$\frac{C_{5}^{3}.C_{25}^{5}}{C_{30}^{8}}=\frac{531300}{5852925}=0.091$$

ج-بفرض أن A الحدث الدال على أن المشتري لم يربح أي جائزة فيكون A' هو الحدث الدال على أن المشتري قد ربح جائزة على الأقل.

وحسب الطلب "أ" فإن:

$$P(A)=0.185\Rightarrow P(A')=1-P(A)=1-(0.185)=0.815$$